TD$_{12}$ – Séries entières

Exercices à préparer

Exercice 1 ★

Déterminer le rayon de convergence R de chacune des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n} z^n$;
2. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{(2n)!} z^n$;
3. $\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n z^n$;
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n}}{2^n+1}$
5. $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$

   où, pour $n \in \mathbb{N}$, a_n est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n (e.g. $a_8 = 1$, $a_{232} = 3$).

Exercice 2 ★★★

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1} \end{cases}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$. En déduire le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$.
2. Montrer que sur $]-R, R[$, la somme S de cette série est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1
3. En déduire une expression de S sur $]-R, R[$ à l'aide des fonctions usuelles.